



**Escuela de Educación**

**Resumen  
de  
Tesis de Maestría en Educación  
con orientación en Gestión Educativa**

**LAS DIMENSIONES ALGORÍTMICA Y CUALITATIVA DEL  
APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES  
ORDINARIAS**

Un estudio en cursos de cálculo multivariable en carreras de ingeniería

Marcela Martins

Director: Mariano Palamidessi

Buenos Aires, diciembre de 2008

## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son una parte muy importante del análisis matemático y modelan innumerables procesos de la vida real. Una ecuación diferencial es una relación, válida en cierto intervalo, entre una variable y sus derivadas sucesivas. Su resolución permite estudiar las características de los sistemas que modelan y una misma ecuación puede describir procesos correspondientes a diversas disciplinas. Las ecuaciones diferenciales tienen numerosas aplicaciones a la ciencia y a la ingeniería, de modo que los esfuerzos de los científicos se dirigieron en un principio, a la búsqueda de métodos de resolución y de expresión de las soluciones en forma adecuada. De este modo, los primeros métodos de resolución fueron los algebraicos y los numéricos. Los primeros permiten expresar la solución en forma exacta, como  $y = f(x)$ , una función de la variable independiente, y los segundos tienen como objetivo calcular valores que toma la solución en una serie de puntos. Al conjunto de estos valores se lo denomina *solución numérica*. La estimación de los valores en puntos intermedios puede obtenerse por interpolación. La necesidad de recurrir a métodos alternativos a los algebraicos obedece a que, con la excepción de unos cuantos casos más o menos sencillos, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no puede ser resuelta satisfactoriamente en forma exacta. Por otra parte, la implementación de técnicas numéricas eficientes requiere previamente el estudio cualitativo de las soluciones. Asimismo, los métodos numéricos, si bien son eficaces para aportar una solución aproximada de algún problema específico, no resultan adecuados para la discusión global del conjunto de todas las soluciones. Basada especialmente en las ideas de Poincaré y Lyapunov se desarrolló la llamada teoría cualitativa, que consiste en estudiar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin resolverla. Este método permite obtener gran cantidad de información acerca de las soluciones, aún sin conocerlas.

Sin embargo, las ecuaciones diferenciales constituyen una mínima parte de los programas de cálculo en carreras de ingeniería en Argentina, y su enseñanza se limita, en muchos casos, al marco algebraico. Numerosas investigaciones ponen de manifiesto que esta manera de enseñarlas no contribuye significativamente a la comprensión de estos objetos matemáticos y por ende se observa en los estudiantes una falta de motivación para su estudio.

Este trabajo intenta mostrar que, como resultado de esta forma de enseñanza, los alumnos de carreras de ingeniería encuentran dificultad para formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones resultantes y formular predicciones respecto del comportamiento de las soluciones.

## **1. Breve historia de las ecuaciones diferenciales**

Las ecuaciones diferenciales se originan en el estudio de problemas dinámicos. En este sentido Arquímedes (287 – 212 aC) puede considerarse un precursor por su formulación de los principios de la palanca, de la polea y del empuje que recibe un cuerpo sumergido en un líquido y también Copérnico (1473 – 1543), a través de su teoría acerca del movimiento de la Tierra y otros planetas en órbitas circulares alrededor del Sol. De acuerdo con Haaser et al. (1990)<sup>1</sup>, el estudio de las ecuaciones diferenciales comenzó con Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) a fines del siglo XXVII.

En esta época los problemas se abordaban de manera geométrica. Para Leibniz el cálculo trataba de sucesiones de valores infinitamente próximos, concibiendo el continuo geométrico como un conjunto de segmentos infinitesimales, en tanto que para Newton involucraba cantidades que variaban con el tiempo.

Durante el siglo XVIII el trabajo consistía en resolver ecuaciones particulares específicas. Estos primeros descubrimientos sugirieron que las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales originadas en problemas geométricos y físicos podrían expresarse por medio de funciones elementales. Hasta la llegada de Liouville (1809 – 1882) los matemáticos no dejaron de buscar un método de resolución que fuera aplicable a todo tipo de ecuaciones diferenciales.

A lo largo de buena parte del siglo XIX los trabajos se orientaron hacia la búsqueda de soluciones en serie y hacia la cuestión de la existencia y unicidad de las soluciones.

Se desarrollan paralelamente los métodos numéricos para la resolución aproximada, con el antecedente del método de Euler (1840). Si bien los primeros métodos numéricos datan de fines del siglo XIX, el desarrollo del análisis numérico sólo fue posible a partir de 1950, con la aparición de las primeras computadoras, que permitieron la puesta a prueba de los algoritmos construidos.

A fines del siglo XIX el desarrollo de la mecánica no lineal puso de manifiesto la necesidad de contar con métodos de tratamiento de las ecuaciones diferenciales no

---

<sup>1</sup> HAASER, N. et al. (1990): p. 590.

lineales. En 1892 se publicaron sendos trabajos relativos a la mecánica no lineal, el primero de Liapunov, traducido del ruso al francés en 1907 como “Problème general de la stabilité du mouvement”<sup>2</sup> y el primer volumen de “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste”, de Poincaré, y presentaron los fundamentos de la llamada teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La teoría<sup>3</sup> se basa en el hecho de que es posible visualizar el desplazamiento de un punto, por ejemplo, en el plano, a partir de una posición inicial, siguiendo una trayectoria tal que para cada valor de  $t$  e  $y$ , la pendiente de su recta tangente en el punto  $(t,y)$  está dada por la expresión de la derivada  $y' = f(t,y)$ . Estas trayectorias se denominan *líneas de flujo*. La forma que adoptan estas curvas, particularmente en la vecindad de ciertos puntos denominados críticos, brinda información fundamental acerca del comportamiento y la evolución temporal de los sistemas modelados por estas ecuaciones. El conjunto de trayectorias se denomina *diagrama de fases*.

## **2. Conclusiones del estudio histórico**

El desarrollo histórico evidencia la existencia de tres modos de resolución de ecuaciones diferenciales. Las consideraciones precedentes exhiben la fuerte presencia de los métodos algebraicos a lo largo de la historia, que tiene su correlato en la preponderancia hasta nuestros días del enfoque algebraico en la enseñanza universitaria.

## **3. La enseñanza de las ecuaciones diferenciales en la universidad**

Diversos autores señalan que la enseñanza de ecuaciones diferenciales en los cursos tradicionales de cálculo está enfocada de manera preponderante a la resolución algebraica.

## **4. Resultados de la enseñanza según el enfoque algebraico**

Según Moreno Gordillo et al.(2003)<sup>4</sup>, como resultado de la forma tradicional de enseñanza los estudiantes desarrollan una visión limitada y restringida de este objeto matemático. El aprendizaje de técnicas para determinar soluciones exactas para un

---

<sup>2</sup> LIAPUNOV, A.M. (1947).

<sup>3</sup> Un estudio histórico detallado y una descripción de las tendencias actuales de la teoría cualitativa puede encontrarse en NÁPOLES VALDÉS, J. E. (2004). Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, *Lecturas Matemáticas*, Vol. 25, pp. 59 – 111.

<sup>4</sup> MORENO GORDILLO, J. et al. (2003): p. 3.

conjunto muy selecto de ecuaciones diferenciales no parece contribuir significativamente a la formulación de modelos ni a la interpretación de resultados en términos del problema original<sup>5</sup>. Más aún, al dejar de lado el aspecto geométrico, los estudiantes encuentran dificultad en resolver problemas que involucren diversos registros semióticos, comprender el significado de una ecuación diferencial y aún reconocerlas, en especial las no lineales. Para algunos investigadores<sup>6</sup> el dominio de técnicas algebraicas constituye un obstáculo para el aprendizaje a través de otros enfoques.

## **5. Alternativas al enfoque algebraico**

Entre las primeras experiencias que revolucionaron la enseñanza de las ecuaciones diferenciales figuran los aportes de Hubbard y West (1985), Tall (1986a) y Artigue (1991) que procuran coordinar los enfoques algebraico, numérico y gráfico.

Rasmussen y King (2000)<sup>7</sup> destacan los cambios ocurridos en los programas de los cursos introductorios de ecuaciones diferenciales en Estados Unidos, que reflejan una disminución en el énfasis dado a las técnicas analíticas en favor del uso de computadoras para incorporar métodos gráficos y numéricos al análisis de una amplia variedad de ecuaciones diferenciales surgidas de situaciones reales. A partir del creciente interés por el estudio de los sistemas dinámicos y en el marco de un proceso de reforma de la enseñanza del cálculo, los matemáticos han aprovechado los avances tecnológicos para incorporar enfoques numéricos y cualitativos, antes reservados al postgrado, a la enseñanza en cursos de grado. Sin embargo, se han llevado a cabo muy pocos estudios acerca de la comprensión y de las dificultades que enfrentan los estudiantes, relacionadas con los conceptos y métodos de análisis de las ecuaciones diferenciales

La posibilidad de contar con computadoras personales, o calculadoras graficadoras y software adecuado facilita la coordinación de diferentes registros de representación (algebraico, diagrama de fases, campos vectoriales asociados, isoclinas, curvas solución, nullclines) fundamental para la aprehensión de estos objetos matemáticos.

---

<sup>5</sup> BLANCHARD, P. (1994): p.385

<sup>6</sup> ARSLAN, S. et al. (2004): p. 8.

<sup>7</sup> RASMUSSEN, C. & KING, K. (2000): p. 161.

En la actualidad se dispone de sitios web interactivos de acceso libre que permiten, mediante los llamados *applets*<sup>8</sup>, introducir la ecuación diferencial, los intervalos en cada variable en que se desea que grafique las curvas solución, pudiendo ampliar el gráfico o cambiar para visualizar el comportamiento de las curvas en la vecindad de algún punto de interés.

En Argentina, el proceso de reforma en la enseñanza del cálculo en ingeniería recién comienza. Las ecuaciones diferenciales son objeto de estudio de, por lo menos, tres materias: en primer lugar, constituyen una parte del programa de cálculo multivariable y, en este contexto, se enseñan casi exclusivamente desde el punto de vista algebraico, dedicando al tema escasas clases. Queda así librada a la decisión del docente la enseñanza de algunas técnicas de análisis cualitativo. Consecuentemente, en carreras de ingeniería de algunas de las universidades más importantes no existe articulación entre los tres enfoques ya que en ninguna de las materias se brinda una visión integradora.

## **6. La construcción de los conceptos matemáticos**

La matemática es una de las disciplinas más difíciles de aprender y requiere tanto de inteligencia intuitiva como de inteligencia analítica.<sup>9</sup>

### **6.1. Conocimiento intuitivo**

Bourbaki destaca el papel de la intuición en el conocimiento matemático, que define como “*un cierto conocimiento de los entes matemáticos, apoyado frecuentemente por imágenes de naturaleza muy variada, fundado primordialmente en la cotidiana frecuentación de ellos.*”<sup>10</sup>

Poincaré (1913)<sup>11</sup> distingue dos enfoques en matemática: el primero de ellos, centrado en la lógica, que procede paso a paso, sin dejar ningún aspecto librado al azar; el segundo, guiado por la intuición, que, de un golpe presenta un panorama completo, aunque precariamente fundamentado. En los estudiantes, según este matemático, se

---

<sup>8</sup> Un *applet* es un componente de una aplicación de software que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo, un navegador web. Los applets ofrecen información gráfica y algunos interactúan con el usuario. Algunos están escritos en lenguaje de programación Java.

<sup>9</sup> DOUVILLE, P. & PUGADEE, D.K. (2003): p. 43.

<sup>10</sup> CAMPOS, A. (1981): p. 189.

<sup>11</sup> Citado por TALL, D. (1991): p.4

observan las mismas tendencias: unos prefieren enfocar los problemas desde el análisis y otros, desde la geometría.

Hadamard (1945)<sup>12</sup> destaca la importancia del razonamiento informal, de las representaciones visuales, de las imágenes mentales (que pueden no ser expresables en palabras) y de la búsqueda de relaciones entre conceptos. Este aspecto experimental de la matemática ha adquirido reciente interés debido al acceso a las representaciones gráficas mediante computadoras, favoreciendo el enfoque cualitativo y visual.

## **6.2. Los objetos matemáticos y sus representaciones**

El pensamiento matemático se lleva a cabo mediante objetos mentales.<sup>13</sup> Estos objetos mentales matemáticos son entes abstractos elaborados en el marco de un sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de problemas.<sup>14</sup>

El uso de sistemas de representación semiótica es esencial en matemática porque, a diferencia de lo que sucede en otros campos conceptuales, no existen otras vías de acceso a los objetos matemáticos que no sean las de sus representaciones. En otras disciplinas, las representaciones son imágenes o descripciones de objetos o fenómenos reales.<sup>15</sup>

Así, la comprensión de un concepto matemático supone la coordinación de al menos dos representaciones semióticas, y puede describirse como la competencia que posee un sujeto para desenvolverse sin inconvenientes en diversas representaciones semióticas de un mismo concepto matemático.

## **6.3. El valor asignado al razonamiento visual en matemática**

Arcavi<sup>16</sup> define *visualización* como la habilidad, proceso y producto de la creación, interpretación, utilización y reflexión acerca de imágenes, cuadros, diagramas, ya sea mentalmente, en el papel o con ayuda de medios tecnológicos de representación, con el propósito de comunicar información, desarrollar ideas y favorecer la comprensión. De

---

<sup>12</sup> Citado por DREYFUS, T. (1991a): p. 29.

<sup>13</sup> HAREL, G. & KAPUT, J. (1991): p. 82.

<sup>14</sup> DREYFUS, T. (1991a): p. 10.

<sup>15</sup> DUVAL, R. (1999): p. 3.

<sup>16</sup> ARCARVI, A. (1999): p. 55.

acuerdo con Presmeg (2006)<sup>17</sup>, cuando una persona percibe un ordenamiento espacial se forma en su mente una imagen visual. La *visualización* incluye procesos de construcción y transformación de imágenes visuales y mentales y todo tipo de representaciones espaciales utilizadas en matemática. La visualización se considera útil para el conocimiento intuitivo y para la formación de conceptos matemáticos. Los diagramas muestran información para la resolución de problemas que no es posible transmitir en palabras. Esto se debe a que estas representaciones preservan explícitamente las relaciones espaciales entre los componentes del problema y es posible establecer nuevas relaciones entre ellos, indispensables para la resolución. Presmeg<sup>18</sup> observa un aspecto sorprendente: la esencia de la visualización reside en las *conexiones* que se establecen entre otras áreas de pensamiento.

## **7. Competencias involucradas en los enfoques algebraico, numérico y cualitativo**

Chau y Pluinage (1999)<sup>19</sup> comparan las competencias involucradas en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales según los diversos enfoques. Del análisis de las tareas propuestas durante la investigación se desprende que, si bien las habilidades requeridas parecen ser independientes, los alumnos que tuvieron mejor desempeño en las tareas de análisis cualitativo sacaron mejor provecho de la información gráfica obtenida a partir del tratamiento numérico de los problemas.

## **8. Antecedentes de investigación**

Diversos investigadores han abordado la problemática del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y su relación con teorías acerca de los registros semióticos de representación: Sandoval Cáceres et al. (2001)<sup>20</sup>, con el objetivo de conocer detalladamente el alcance de la coordinación de diferentes registros de representación en la resolución de ecuaciones diferenciales. Arslan et al. (2004)<sup>21</sup> sostienen que el enfoque cualitativo contribuye a la mejor comprensión de algunas nociones clave del cálculo, frente a las técnicas algebraicas de enseñanza. Rasmussen (1996)<sup>22</sup> busca

---

<sup>17</sup> PRESMEG, N. (2006) : p. 206.

<sup>18</sup> PRESMEG, N. (2006) : p. 211.

<sup>19</sup> CHAU, O. & PLUVINAGE, (1999). p. 195.

<sup>20</sup> SANDOVAL CÁCERES, I. T. et al. (2001):

<sup>21</sup> ARSLAN et al. (2004): p. 2.

<sup>22</sup> RASMUSSEN, C.L. (1996): p. 4.

respuestas a preguntas tales como qué significado adquiere para una estudiante el análisis cualitativo.

Por su parte Donovan (2004)<sup>23</sup> describe las características de los esquemas conceptuales acerca de las ecuaciones diferenciales desarrollados por dos alumnos de las carreras de ingeniería mecánica y de profesorado universitario de matemática.

## **9. Los tres modos de resolución de ecuaciones diferenciales**

### **9.1. La resolución algebraica**

La solución de una ecuación diferencial es simplemente una función que verifica la ecuación en cierto intervalo real de la variable independiente: al sustituir esta función en la ecuación original se obtiene una identidad. Algunas ecuaciones diferenciales admiten una solución explícita. Es necesario complementar el enfoque algebraico con los puntos de vista cualitativo y numérico.

### **9.2. El análisis cualitativo**

El análisis cualitativo consiste en estudiar el comportamiento global de las curvas solución.

### **9.3. El tratamiento numérico**

Los problemas de valor inicial  $x'(t) = f(x, t)$  ;  $x(a) = x_0$ , pueden resolverse en forma aproximada mediante diversos métodos numéricos. Dado que la derivada en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la curva solución en dicho punto, es posible aproximar el valor de la pendiente por medio de la pendiente de una recta que una el punto  $(t_n, x_n)$  en cuestión y un punto próximo  $(t_{n+1}, x_{n+1})$ .

## **10. La necesidad de integración de los tres enfoques**

Al respecto Neill & Shuard (1982) afirman: “*En el estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden, la obtención de una fórmula explícita para la solución mediante integración, el gráfico de curvas solución y su evaluación numérica contribuyen por igual a la comprensión de la solución.*”<sup>24</sup>

---

<sup>23</sup> DONOVAN, J.E. (2004): p. 2.

<sup>24</sup> NEILL, H. & SHUARD, H. (1982): p. 147.

## **11. Análisis de programas y de libros de texto**

### **11.1. Análisis de programas de asignaturas que incluyen ecuaciones diferenciales**

Este apartado ilustra la preponderancia del enfoque algebraico en el estudio de las ecuaciones diferenciales en carreras de ingeniería.

Se presenta en primer lugar un análisis de los programas vigentes de cursos de cálculo y de álgebra lineal. También se presenta el programa de la asignatura “Modelado y Simulación” para carreras de ingeniería, que una universidad privada argentina ha reformado recientemente. Se incluye asimismo, un comentario sobre el programa de una materia optativa denominada “Ecuaciones Diferenciales” correspondiente al plan de estudios de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

#### **11.1.1. Ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la UBA**

Las ecuaciones diferenciales se abordan en las asignaturas Análisis Matemático II y Álgebra II. Ambas incluyen una unidad dedicada a este tema en sus respectivos programas.

#### **11.1.2. Ecuaciones diferenciales en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional**

La Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional presenta en su programa de Análisis Matemático II una unidad dedicada a ecuaciones diferenciales. La extensión del programa y las cuatro clases asignadas al tema no permiten más que un tratamiento superficial de tipo algorítmico.

#### **11.1.3. Ecuaciones diferenciales en la Universidad Argentina de la Empresa**

Las ecuaciones diferenciales forman parte de dos asignaturas que se dictan en esta institución: Análisis Matemático III y Modelado y Simulación.

### **11.2. Análisis de libros de texto de ecuaciones diferenciales**

El análisis realizado pretende mostrar que si bien los libros más citados y recomendados por los profesores se orientan preferentemente al enfoque algebraico, existen desde hace muchos años numerosos y excelentes textos referidos al análisis cualitativo.

## **12. El problema de investigación**

En algunos de los cursos en que se desempeña la autora de este trabajo los alumnos demuestran poco interés por las ecuaciones diferenciales y sus métodos de resolución,

considerándolos un conjunto de recetas para manipular objetos que tienen escaso significado para ellos.

Con el fin de desarrollar estrategias de enseñanza que contribuyan al aprendizaje significativo de este concepto, se desea conocer en primer lugar qué concepciones han desarrollado los alumnos de cursos de cálculo multivariable en carreras de ingeniería acerca de las ecuaciones diferenciales luego de estudiar el tema desde el enfoque algebraico.

### **13. Objetivo**

El estudio pretende caracterizar las concepciones acerca de las ecuaciones diferenciales que desarrollan los alumnos en tres dimensiones que se condensan en otras tantas variables que se denominan

- a) PR: planteo y resolución de problemas de rutina.
- b) ARS: articulación entre diversos registros semióticos y
- c) ACC: análisis del comportamiento del sistema mediante la naturaleza de sus soluciones.

### **14. Hipótesis**

La limitación al marco algebraico para el estudio de las ecuaciones diferenciales puede constituir el origen de concepciones parcializadas en los alumnos.

### **15. Marco teórico**

El conocimiento construido por los alumnos se manifiesta a través de sus actos y producciones. Por lo tanto, es fundamental establecer una relación válida entre estos productos y el conocimiento en cuestión.

Schoenfeld <sup>25</sup> define la matemática como una actividad eminentemente social, llevada a cabo por una comunidad (la de los matemáticos) abocada al estudio de las regularidades de los sistemas, definidas en forma axiomática o teórica (matemática pura) o a partir de modelos provenientes del mundo real (matemática aplicada).

---

<sup>25</sup> SCHOENFELD, A.H. (1992): p. 336.

De acuerdo con Brousseau,<sup>26</sup> las nociones matemáticas sólo pueden analizarse en la medida en que constituyen la solución de una situación.

La noción de *concepción* requiere una definición precisa. Balacheff<sup>27</sup>, la enuncia como sigue:

*“Nous appelons conception C, un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel:*

- *P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire;*
- *R est un ensemble d’opérateurs ;*
- *L est un système de représentation, il permet d’exprimer les éléments de P et de R ;*
- *Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C”*

Siguiendo a Balacheff, los operadores R pueden definirse como los medios que permiten realizar una evolución en la relación sujeto-problema. Estos medios pueden ser concretos (por ejemplo, la interfaz de un software para la resolución) o abstractos (por ejemplo, reglas algebraicas). El sistema de representación L es un conjunto de significantes, de naturaleza lingüística o no, utilizados en la interfaz sujeto-problema; incluye lenguaje algebraico, lenguaje natural, representaciones gráficas, etc. El último elemento, la estructura de control  $\Sigma$ , comprende todos los elementos necesarios para tomar decisiones o realizar elecciones o justificaciones.

Se aplicará este modelo de concepciones al estudio de las ecuaciones diferenciales, siguiendo a Arslan<sup>28</sup>. La concepción algebraica ( $C_a$ ) que corresponde a la resolución algebraica, la concepción cualitativa ( $C_c$ ) que corresponde al enfoque cualitativo y, por último, la concepción numérica ( $C_n$ ) que corresponde a la aproximación numérica.

## **CAPÍTULO II. MATERIAL Y MÉTODOS**

Para este estudio se ha considerado apropiado un diseño mixto de investigación, consistente en una primera parte de carácter cuantitativo. El criterio para la selección de la muestra es intencional; en este sentido se seleccionan casos que presenten variaciones en aquellas características que se consideran relevantes para responder al interrogante planteado.<sup>29</sup>

---

<sup>26</sup> BROUSSEAU, G. (1997). p. 5.

<sup>27</sup> BALACHEFF, N. (1995). p. 221.

<sup>28</sup> ARSLAN, S. (2005): p. 48.

<sup>29</sup> FORNI, F. et al. (1994): p. 109.

## **1. Procedimiento**

Bajo el paradigma cualitativo, con el objeto de caracterizar las concepciones acerca de las ecuaciones diferenciales de un grupo de alumnos universitarios, se trabajó en dos etapas. Para la primera etapa, la metodología de campo consistió en encuestar al alumnado en sus grupos de clase. La encuesta consistió en una prueba semiestructurada integrada por tres ítems correspondientes a cada una de las dimensiones a explorar, con el objeto de construir tipologías. La construcción de tipologías permite ordenar los casos y elaborar hipótesis conceptuales sobre cada grupo. Mediante el análisis de semejanzas en las respuestas se crean tipos ideales que actúan como categorías conceptuales.

En base a los tipos de respuestas obtenidas se seleccionó un representante de cada grupo para un estudio de casos llevado a cabo mediante entrevistas cualitativas, guiadas por una serie de preguntas.

## **2. Muestra**

Se administró la prueba a una muestra incidental compuesta por 238 alumnos de asignaturas que incluyen en sus contenidos el tópico de ecuaciones diferenciales ordinarias, que cursan en la Universidad de Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional y Universidad Argentina de la Empresa.

## **3. Instrumentos**

Para la primera parte del estudio se utilizó un cuestionario compuesto por dos ítems con el objetivo de explorar las habilidades de los alumnos para formular un modelo, formular predicciones sobre su comportamiento y articular diversas representaciones semióticas.

El estudio de casos se realizó en base a entrevistas focalizadas. Para ello se confeccionó una lista de temas con anterioridad, de modo de asegurar que fueran cubiertos los temas relevantes, a partir del examen de las respuestas de los alumnos al cuestionario.

## **4. Técnica de análisis**

A fin de describir las diferentes posibilidades que pueden adquirir las concepciones en estudio se realiza una desagregación en tres dimensiones que resulta en la definición de *variables*. Las variables son aspectos discernibles de un objeto de estudio.<sup>30</sup>

PR: planteo y resolución algebraica de problemas de rutina.

ARS: articulación entre diversos registros semióticos en la representación de problemas de rutina.

ACC: análisis del comportamiento cualitativo del sistema mediante la naturaleza de sus soluciones.

## CAPÍTULO III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Resultados generales

Una visión global de las respuestas al cuestionario del Anexo I permite clasificar a los alumnos en tres grupos:

1. Alumnos que tienen un mejor desempeño en la resolución analítica del problema.
2. Alumnos que han logrado una adecuada articulación entre los dominios analítico y cualitativo.
3. Alumnos con capacidad de realizar un análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones a partir de los gráficos.

La composición de la muestra, según las dimensiones presentadas en el apartado 5, se infiere a partir de la estructura global de índices que se presenta en la figura siguiente:

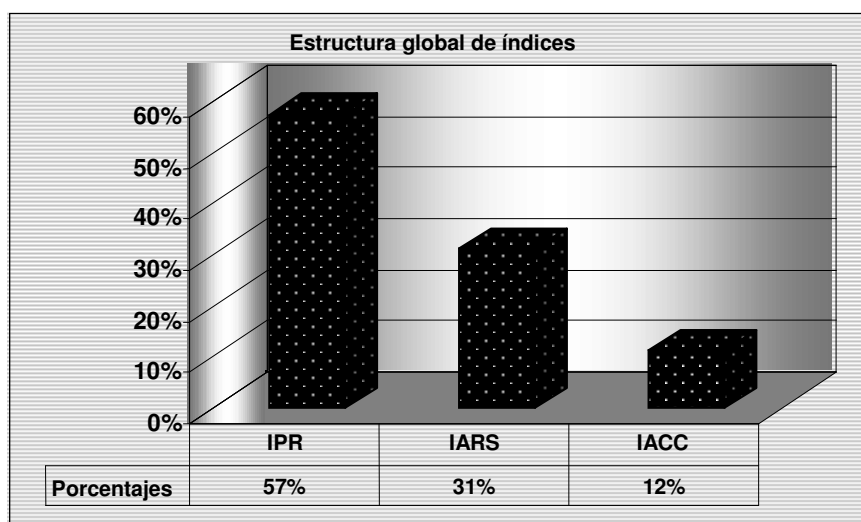


Figura 28. Estructura global de índices

<sup>30</sup> KORN et al. (1969). p. 9.

PR: planteo y resolución de problemas de rutina,

ARS: articulación entre diversos registros semióticos y

ACC: análisis del comportamiento cualitativo del sistema mediante la naturaleza de sus soluciones.

La estructura de índices revela que los alumnos logran mejores desempeños en cuanto al planteo y a la resolución analítica de problemas similares a los que se presentan durante un curso tradicional de ecuaciones diferenciales, esto es, enfocado desde el punto de vista algebraico.

#### **CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES**

Del análisis de las respuestas al cuestionario y de las entrevistas con los alumnos se observa que sólo algunos alumnos comprenden el significado de las ecuaciones diferenciales como descriptoras de sistemas dinámicos, es decir, que evolucionan en el tiempo, tienen en general una visión limitada del comportamiento de las soluciones y requieren resolver la ecuación para graficar las curvas solución. Este hecho constituye una limitación seria, ya que sólo pueden realizar predicciones relativas a sistemas modelados por ecuaciones que admitan solución exacta, ya que, por otra parte, desconocen los métodos numéricos. La imagen conceptual que los alumnos tienen de las ecuaciones diferenciales se parece más a una relación algebraica entre variables y derivadas que a una descripción de un proceso que tiene lugar en el tiempo. Los alumnos evidencian, en general, dificultades en cuanto a la coordinación de los registros. Excepto en lo que se refiere a algunas tareas sencillas, los alumnos evidencian desconcierto cuando se enfrentan con tareas de interpretación cualitativa.













